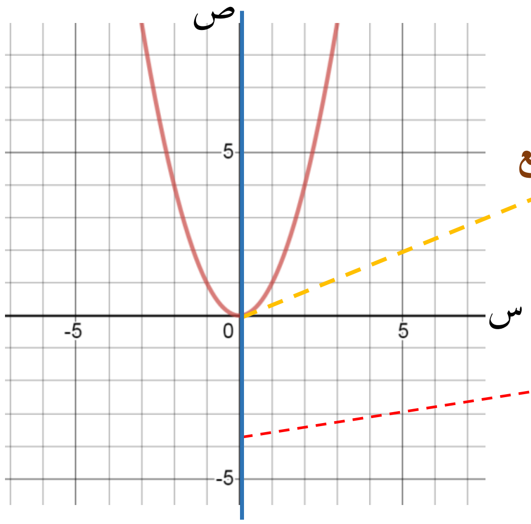
الحَلّ

الاقترانات التّربيعيَّة

التّمثيلُ البَيانِيّ (رَسْمُ) الاقتران التّربيعِيّ في المُستوى الدِّيكارتيّ:

كُلُّ اقتران تربيعيّ يُمَثَّل بيانيّاً (يُرسم) في المُستوى الدِّيكارتيّ بناءً على تمثيل الاقتران التّربيعيّ **ق(س) = س^{٢}**

والذي تمثيله يُشبهُ القوس (الكأس) المفتوح لأعلى، كما في الشّكلِ المُجاور:



وهذا الشكلُ يُسمّى بِـ: **قَطْع مُكافِئ**

لاحظ: الشكل المرسوم على هيئة وادٍ ، وأصغر نُقطة فيهِ تُسمّى **برأس القطع**

وفي هذه الحالة تكون قيمة الاقتران هي أصغر قيمة.

لا يوجد أكبر قيمة للاقتران فقيمته تكبُر إلى مالانهاية كما مُبيَّن في الشّكل.

الخطُّ العموديّ الذي يمُرُّ في نقطة الرّأس يُسمّى بـ**مِحوَرِ التّماثُل** وذلك لأنَّهُ

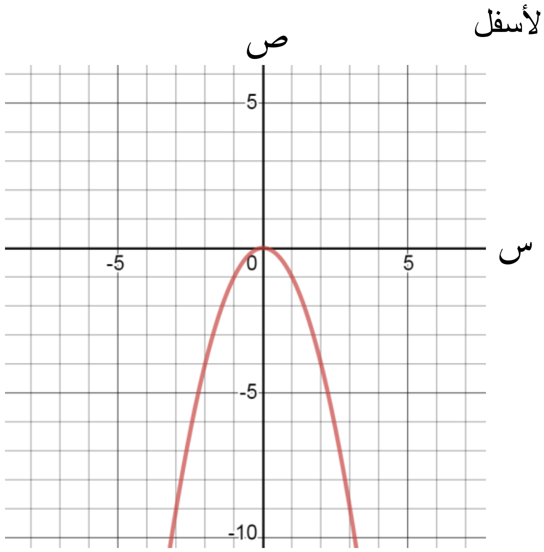
يقسم القطع المُكافِئ إلى نِصفَيّن مُتماثِلَيّن (مُتكافِئين)،

ومُعادلة مِحور التّماثُل هي: ص = ٠

إذا كان المُعامل الرّئيسيّ (أ – مُعامل س^{٢}) عدداً موجباً كان القطع مفتوح لأعلى كما في الرّسم أعلاه.

وإذا كان المُعامل الرّئيسيّ (أ – مُعامل س^{٢}) عدداً سالِباً كان القطع مفتوح لأسفل

فمثلاً: الاقتران: ق(س) = – س^{٢} رسمه في الشّكلِ المُجاور

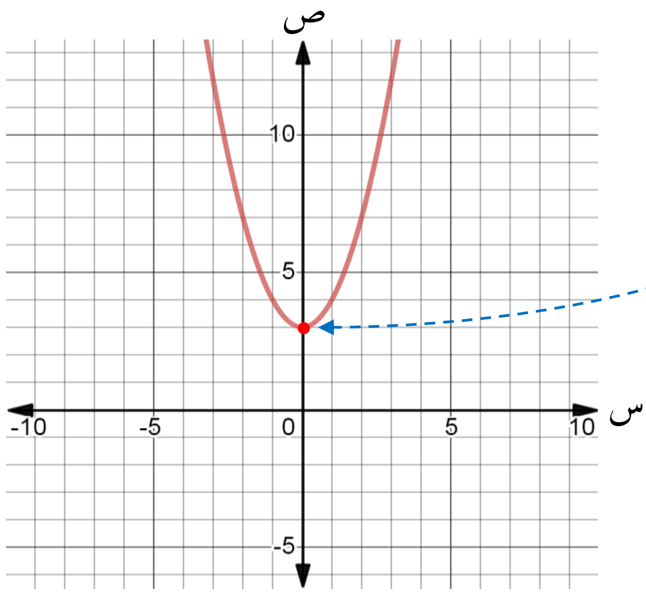


إذا أردنا أنْ نرسُم أيّ اقتران تربيعيّ، فرسمه سيكون فقط عملية انسحاب لأعلى، لأسْفل، لليمين أو اليسار مع تصغير/أو تكبير فقط. كما يلي:

مثال ١ :

ق(س) = س^{٢} + ٣ هي تمثيل القطع المُكافِئ (ق(س) = س^{٢}) المفتوح لأعلى مع سحبَهُ ٣ وِحدات لِأَعْلى.

احداثِيّات نُقطة الرّأس = (٠ ، ٣)

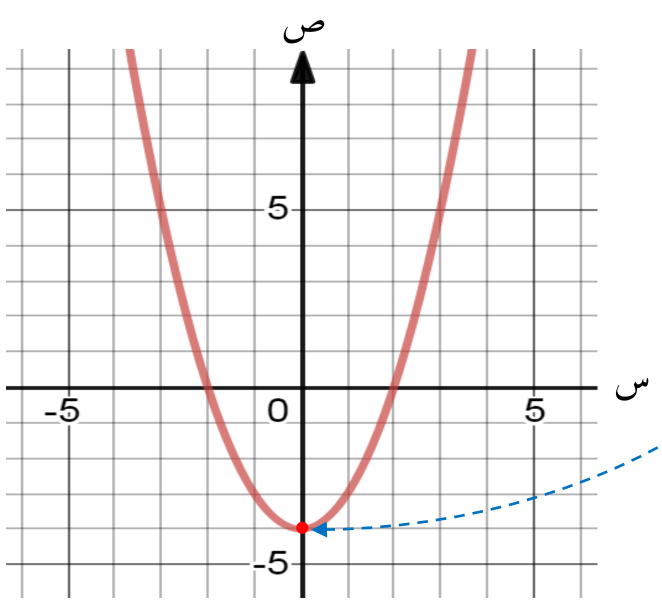


مُعادلة مِحور التّماثُل: س = ٠

مثال ٢ :

ق(س) = س^{٢} – ٤ هي تمثيل القطع المُكافِئ (ق(س) = س^{٢}) المفتوح لأعلى مع سحبَهُ ٤ وِحدات لِأَسْفَل.

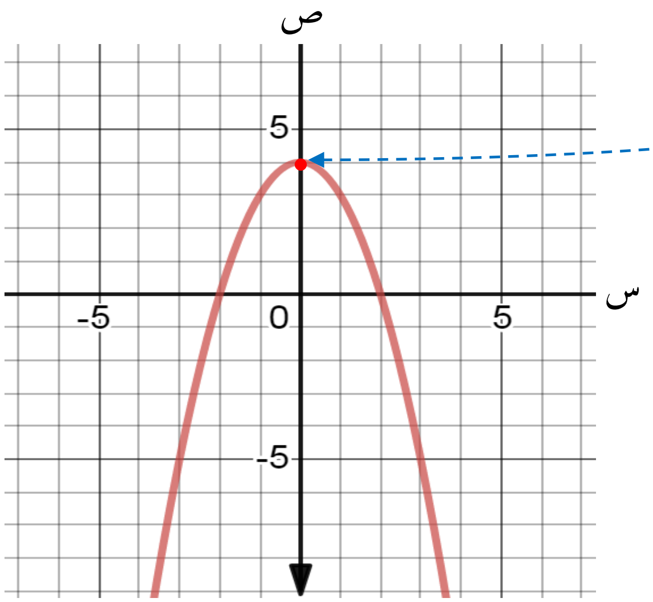
احداثِيّات نُقطة الرّأس = (٠ ، – ٤)



مُعادلة مِحور التّماثُل: س = ٠

مثال٣:

ق(س) = ـ س^{٢} + ٤ هي تمثيل القطع المُكافِئ (ق(س) = س^{٢}) المفتوح **لأسْفَل** مع سحبَهُ ٤ وِحدات لِأَعْلى.

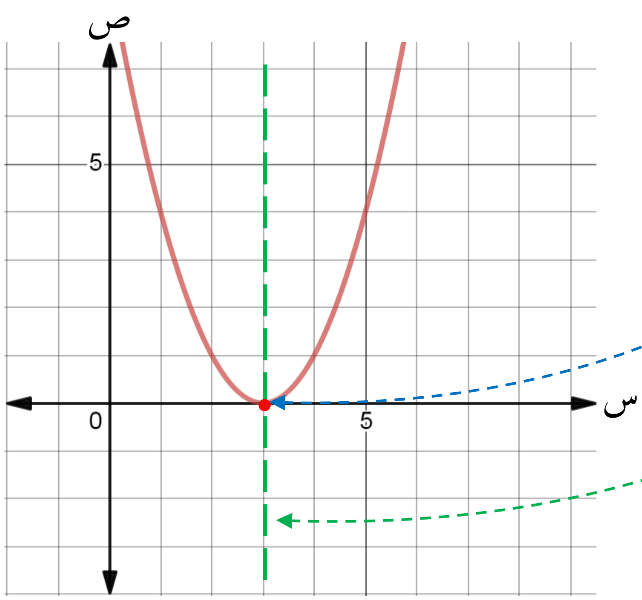


احداثِيّات نُقطة الرّأس = (٠ ، ٤)

مُعادلة مِحور التّماثُل: س = ٠

مثال٤ : ق(س) = (س ـ٣)^{٢}

هي تمثيل القطع المُكافِئ (ق(س) = س^{٢}) المفتوح لأعلى مع سحبَهُ ٣ وِحدات **لِيمين** (عكس إشارة العدد).



احداثِيّات نُقطة الرّأس = (٣ ، ٠)

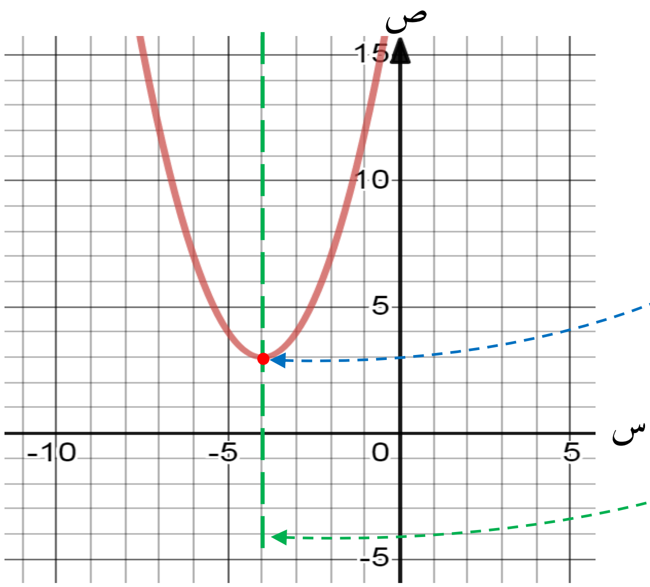
مُعادلة مِحور التّماثُل: س = ٣

مثال٥: ق(س) = (س+٤)^{٢} + ٣

هي تمثيل القطع المُكافِئ (ق(س) = س^{٢}) المفتوح لِأعلى مع سحبَهُ ٤ وِحدات **لليسار** وَ ٣ وحدات لِأعلى.

احداثِيّات نُقطة الرّأس = (ــ ٤ ، ٣)

مُعادلة مِحور التّماثُل: س = ٣



نظرية: إذا كان ق(س) اقتران تربيعيّ مُعادلته ق(س) = ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، فإنَّ:

١. إذا كان أ > ٠ (عدداً موجباً) كان القطع فاتح لأعلى، وإذا كان أ < ٠ (عدداً سالباً) كان القطع فاتح لِأسْفَل.

٢. المقطع الصّاديّ = ق(٠) = جـ = الحدّ المُطلَق.

٣. احداثِيّات نُقطة الرّأس = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ق\left(\frac{-ب}{٢أ} \right) \right)$ أيّ: أنّنا نجد $\frac{-ب}{٢أ}$ ثُمَّ نُعَوِّض الإجابة في ق(س).

٤. مُعادلة مِحور التّماثُل هي: س = $\frac{-ب}{٢أ}$

مثال: ق(س) = س^{٢} + ٨ س + ١٩ ⇐ أ = ١ ، ب = ٨ ، جـ = ١٩ .

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٨}{٢ \times ١} = \frac{-٨}{٢} = -٤$ ، ق(ــ٤) = (ــ٤)^{٢} + ٨ × (ــ٤) + ١٩ = ١٦ ــ ٣٢ + ١٩ = ٣

إذنْ: احداثِيّات نُقطة الرّأس هي: (ــ٤ ، ٣) ، ومُعادلة محور التّماثُل هي: س = ــ٤ .

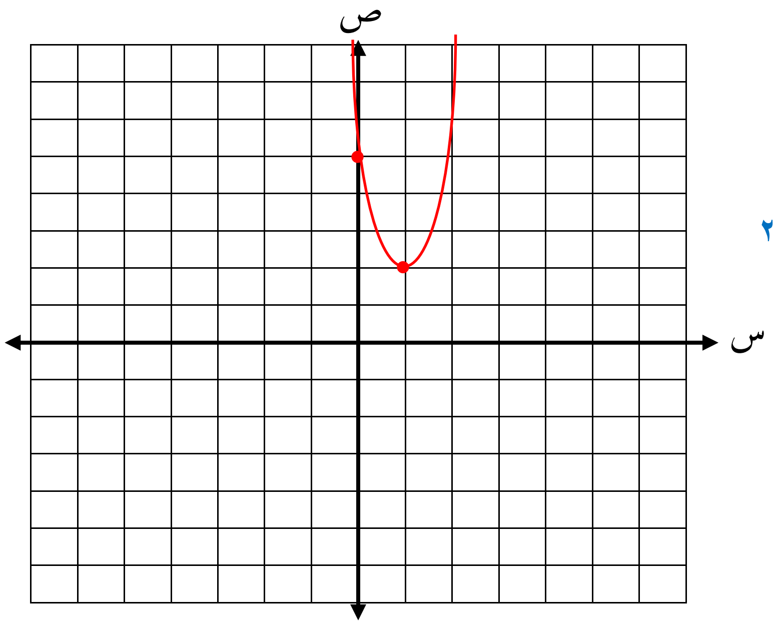
بما أنّ أ = ١ (موجب) فالقطع فاتح لِأعلى والمقطع الصّادِيّ = الحدّ المُطلق = ١٩ .

تدريبات ٢

السؤال الأول: إذا كان ق(س) = ٣ س^{٢} – ٦ س + ٥ لنُجيب عمّا يلي ثُمَّ لنرسُم تمثيلاً تقريبيّاً للاقتران:

١. المقطع الصّاديّ = **٥**

٢. هل القطع المُكافئ فاتح لأعلى أمْ لِأسْفَل ؟ **فاتح لِأعلى لأنَّ مُعامل س^{٢} عدداً موجباً (٣)**



٣. احداثيّات نُقطة الرّأس:

$$\frac{-ب}{٢ أ} = \frac{-(-٦)}{٢(٣)} = \frac{٦}{٦} = ١$$

ق(١) = ٣(١)^{٢} – ٦(١) + ٥ = ٣ – ٦ + ٥ = ٢

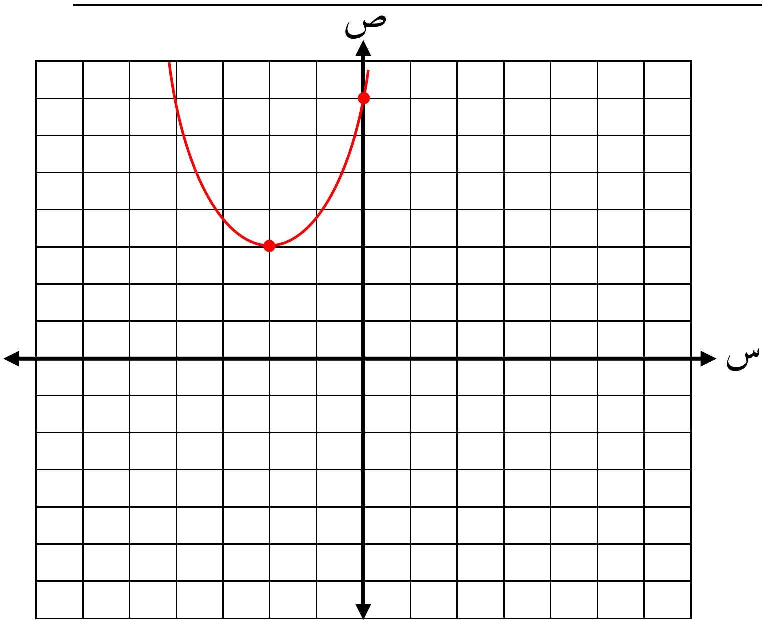
نُقطة الرّأس = (١ ، ٢)

٤. مُعادلة محور التّماثُل: **س = ١** .

السؤال الثاني: إذا كان ك(س) = س^{٢} + ٤ س + ٧ لنُجيب عمّا يلي:

١. المقطع الصّاديّ = **٧**

٢. هل القطع المُكافئ فاتح لأعلى أمْ لِأسْفَل ؟ **فاتح لِأعلى لأنَّ مُعامل س^{٢} عدداً موجباً (١)**



٣. احداثيّات نُقطة الرّأس:

$$\frac{-ب}{٢ أ} = \frac{-(٤)}{٢(١)} = \frac{-٤}{٢} = -٢$$

ق(-٢) = (-٢)^{٢} + ٤(-٢) + ٧ = ٤ – ٨ + ٧ = ٣

نُقطة الرّأس = (-٢ ، ٣)

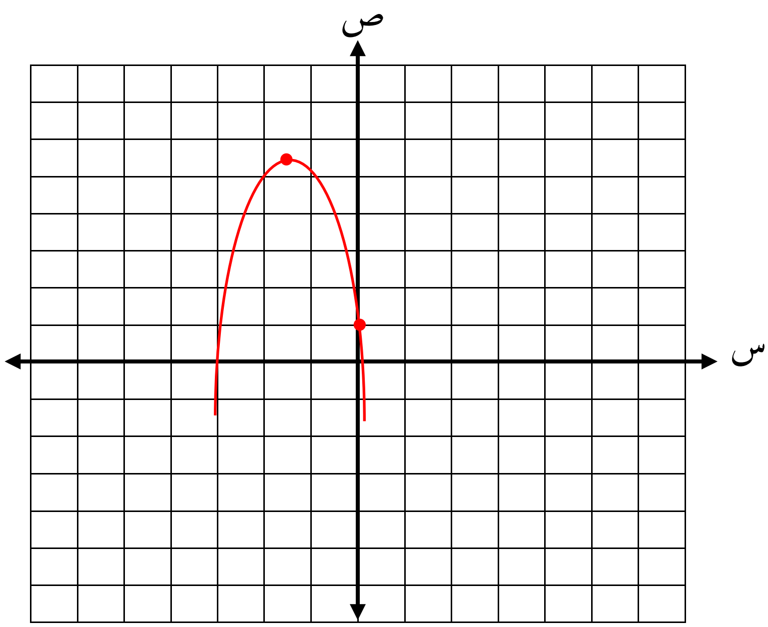
٤. مُعادلة محور التّماثُل: **س = – ٢** .

السؤال الثالث: إذا كان ع(س) = – ٢ س^{٢} – ٦ س + ١ لنُجيب عمّا يلي:

١. المقطع الصّاديّ = ١

٢. هل القطع المُكافئ فاتح لأعلى أمْ لِأسْفَل ؟ **فاتح لِأسفل لأنَّ مُعامل س^{٢} عدداً سالِباً (– ٢)**

٣. احداثِيّات نُقطة الرّأس:



$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٦)}{٢(-٢)} = \frac{٦}{-٤} = -١,٥$

ق(-١,٥) = -٢(-١,٥)^{٢} – ٦(-١,٥) + ١

= -٢(٢,٢٥) +٩ + ١ = ٥,٥

٤. مُعادلة محور التّماثُل: **س = – ١,٥** .